Διάλεξη 1η

17/02/2020

ΚΛΑΣΙΚΗ ΜΗΧΑΝΙΚΗ

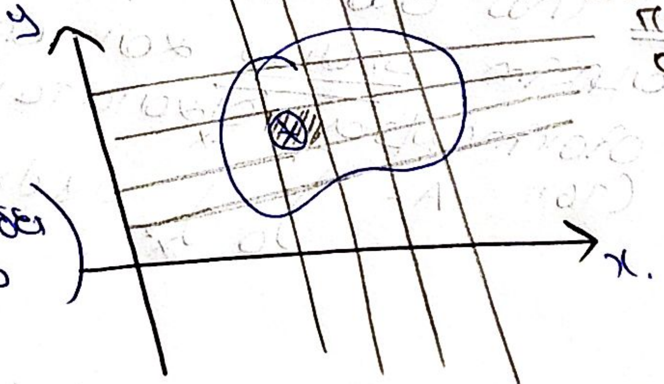
Θ. Χωρίκης (313Ε)
horikis@uoi.gr

Στερεά Σώματα: Βασικό χαρακτηριστικό των στερ. σωμάτων είναι η ακαμψία, δηλαδή αλλάζουν ελάχιστα κάτω από αλλαγές πίεσης, θερμοκρασίας. Ένα τέλειο σώμα θεωρούμε ότι διατηρεί σταθερό μέγεθος και σχήμα.

Ορισμός: Ένα σύστημα σωματιδίων, όπου η απόσταση μεταξύ 2 (τυχαίων) σωματ. δεν αλλάζει ανεξάρτητα από τις δυνάμεις που δρουν σε αυτό, λέγεται στερεό σώμα.

Εμβαδόν (R^2):

- Το κόβω σε πολλά μικρά κομμάτια (διαμερ.) έτσι ώστε να μην προκληθεί καμία αλλαγή.



(*): Το ονομάζω $\Delta A = \Delta x \Delta y$ (στοιχειώδες εμβαδό)

Θεωρούμε ένα κλειστό και φραγμένο χωρίο. Το στοιχ. εμβαδόν $\Delta A = \Delta x \Delta y$ "αθροίζεται" στο ολικό εμβαδόν ως

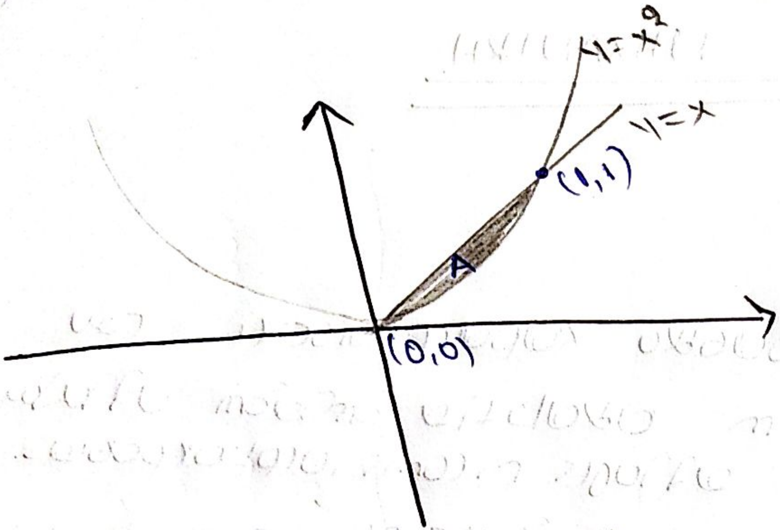
$$\boxed{A = \iint_R dx\,dy = \iint_R dy\,dx.}$$

← ισχύει πάντα; "ειδική" ερώτηση

Π.χ.: Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y=x$ και $y=x^2$, $x,y>0$

Λύση

Πάντα, πρώτα θα πρέπει να ξεκινάω, ζωγραφίζοντας το χωρίο!!!



Ψάχνω το εμβαδόν A.

Αρχικά βρίσκω τα σημεία τομής, λύνοντας το εξής σύστημα:

$$\begin{cases} y = x \\ y = x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$$

(*) Σταθερά άκρα έχω λόγω στα "κουτιά". Σταθερά άκρα είναι ότι η μια διάσταση δεν επηρεάζει την διάσταση της άλλης.

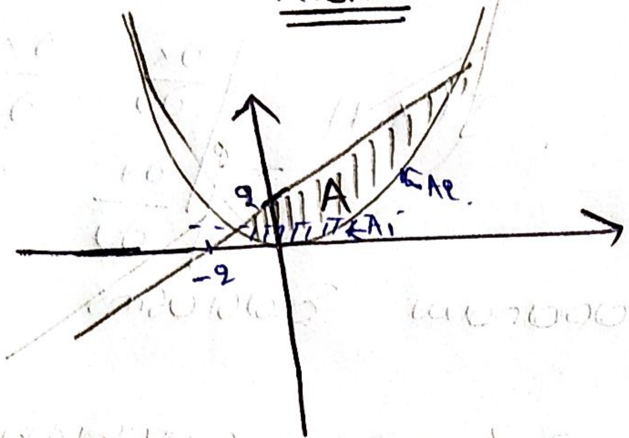
Διατάζω την πρώτη ολοκλήρωση να την κάνω ως προς y, δηλαδή από κάτω (που είναι η x^2) προς τα πάνω (που είναι η x). Παρατηρώ δηλαδή από ποια καμπύλη μπαίνω και από ποια βγαίνω. Το "έξω-έξω" ολοκλήρωμα δικαιούται να έχει σταθερά άκρα. Έτσι $\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\,dx = \int_0^1 (x^2-x)\,dx = \frac{1}{6}$.

$\int_{x^2}^{x} \int_0^1 =$ πηγαίνω από αριστερά-δεξιά και έτσι θα έχω ότι $\int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} dx\,dy = \dots = \frac{1}{6}$

Άρα $A = \frac{1}{6}$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τις καμπύλες: $y=x+2$ και $y=x^2$.

Λύση



Σημεία τομής:

$$\begin{cases} y=x+2 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-x-2=0 \Rightarrow x=-1,\ x=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1,\ y=1 \\ x=2,\ y=4 \end{cases}$$

- Από κάτω προς τα πάνω:

$$\int_{-1}^{2}\int_{x^2}^{x+2} dy\,dx = \int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx = \dots = \frac{9}{2}$$

- Από αριστερά προς τα δεξιά:

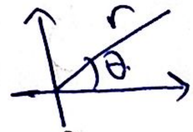
$$\underbrace{\int_{0}^{1}\int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} dx\,dy}_{A_1} + \int_{1}^{4}\int_{y-2}^{\sqrt{y}} dx\,dy = \frac{9}{2}$$

Πολικές συντεταγμένες:

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$ (κυλινδρικές)

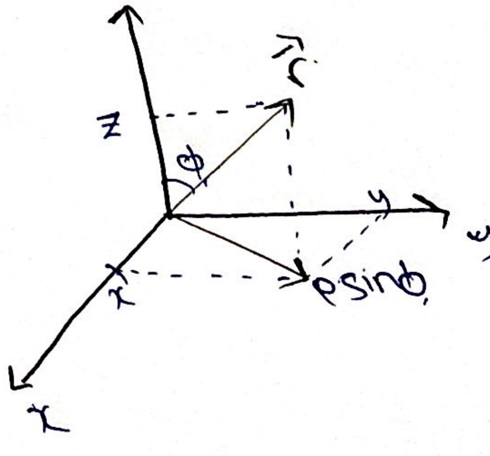


Σφαιρικές συντεταγμένες:

$x = \rho\sin\phi\cos\theta$

$y = \rho\sin\phi\sin\theta$

$z = \rho\cos\phi$



Αλλαγή μεταβλητής σε πολλαπλά ολοκληρώματα:

Γίνεται μέσω της Ιακωβιανής ορίζουσας:

$$\begin{cases} y = f(u,v) \\ x = g(u,v) \end{cases} \quad , \quad J(x,y) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Αντίστοιχα σε παραπάνω διαστάσεις.

Παραδείγματα:

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}\right\}$$ πολικές συντεταγμένες $\underline{J = r}$.

$$\left.\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \\ z &= z \end{aligned}\right\}$$ κυλινδρικές συντεταγμένες $\underline{J = r}$

$$\left.\begin{aligned} x &= \rho\sin\phi\cos\theta \\ y &= \rho\sin\phi\sin\theta \\ z &= \rho\cos\phi \end{aligned}\right\}$$ σφαιρικές. $\underline{J = \rho^2\sin\phi}$.